Le but du problème est d'étudier la position relative d'une courbe et d'une tangente à cette courbe en un point, et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

Sur la figure ci-après a été tracée la courbe représentative C de la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle]0 ;6] par :

$$f(x)=\frac{x+2}{x}+\ln x$$

Partie A – Etude de la fonction f.

Soit f la fonction définie sur] 0 ;6] par : $f(x)=\frac{x+2}{x}+\ln x$.

1. Calculer la limite de f en zéro. On pourra mettre f(x) sous la forme :

$$f(x)=\frac{x+2+x\ln x}{x}$$

2. Calculer f(1) ; f(2) , f(e), f(4) et f(6).

3.a. Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle]0 ;6], on a :

$$f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$$

3.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur]0 ;6].

3.c. Etablir le tableau de variations de f sur]0 ;6].

Partie B – Position de la courbe par rapport à une tangente.

1. Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 4 est :

$$y=\frac{x}{8}+1+\ln 4.$$

2. On considère la fonction, g définie sur]0 ;6] par :

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{x}{8}+1+\ln 4\right)$$

2.a. Vérifier que pour tout x de]0 ;6] : $g(x)=\ln x-\ln 4+\frac{2}{x}-\frac{x}{8}$

2.b. Montrer que pour tout x de]0 ;6] : $g'(x)=\frac{-x^2+8x-16}{8x^2}$.

2.c. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur]0 ;6].

2.d. Préciser le sens de variation de g sur]0 ;6] (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition).

2.e. Calculer g(4) et en déduire le signe de g sur]0 ;6].

3. En déduire la position relative de C et T.

4. Tracer la droite T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la figure.

Partie C – Calcul d'une aire.

1. Soit la fonction H définie sur]0 ;6] par : $H(x)=(2+x)\ln x$

Calculer H'(x).

2. On considère la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e. On appelle A l'aire exprimée en cm², de cette partie du plan.

   2.a. Hachurer cette partie sur la figure.

   2.b. Donner la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.